Programm- und Dokumentationserstellung: .... **Friedemann Kienzler**

===

TI-99/4A MATHEMATIK – Programmpaket

===

Konfiguration: Micro-Computer TI-99/4A
ROM-Erweiterung TI-Extended-Basic
evtl. TI-32 Zeichen-Thermodrucker

Das MATHEMATIK-Programmpaket setzt sich aus folgenden Einzel-Programmen zusammen:

I Wahrscheinlichkeitsrechnung

1) BINOMIAL:
- a) Bestimmung der Wahrscheinlichkeitsfunktion einer binomialverteilten Zufallsvariablen
- b) Bestimmung der Verteilungsfunktion einer binomialverteilten Zufallsvariablen
- c) Wahrscheinlichkeitstest bei binomialverteilten Zufallsvariablen (Bestimmung Annahme- und Ablehnintervall)

2) NORMALVERT:
- a) Zweiseitiger Wahrscheinlichkeitstest bei normalverteilten Zufallsvariablen (Bestimmung Signifikanzintervall bei vorgegebenem Stichprobenmittelwert)
- b) Wahrscheinlichkeitstest bei normalverteilten Zufallsvariablen (in Umgebung vom Erwartungswert)

II Analysis

1) NULLSTELLE:
- a) Nullstellenberechnung einer beliebigen Funktion mittels Newton-Verfahren
- b) Nullstellenberechnung einer beliebigen Funktion mittels Regula-Falsi
- c) Nullstellenberechnung einer beliebigen Funktion mittels Intervallhalbierung
- d) Berechnung aller Nullstellen einer beliebigen rationalen Funktion

III Zahlentheorie

1) BRUCH:
- a) Verknüpfung zweier Brüche
- b) Kürzen eines Bruchs

2) PRIMZERLEG:
- a) Zerlegen einer vorgegebenen Zahl in ihre Primfaktoren

3) PRIMZAHLEN:
- a) Berechnung der ersten n Primzahlen mittels Teiler-Test-Verfahren
- b) Berechnung der Primzahlen bis m mittels „Sieb des Erathostenes“

IV Algebra

1) GAUSS:
- a) Lösen eines Gleichungssystems mittels Gauß-Eliminationsverfahren

Bei den Erläuterungen zu den einzelnen Programmen wurde auf Struktogramm und Darstellung des Programmablaufs verzichtet!

Programm: **BINOMIAL**

Mit diesem Programm lassen sich die Wahrscheinlichkeitsfunktion, die Verteilungsfunktion und der Annahmebereich (bei vorgegebener Irrtums-Wahrscheinlichkeit) einer binomialverteilten Zufallsvariablen berechnen.

a) Wahrscheinlichkeitsfunktion:

Theorie: Bezeichnet die Zufallsvariable x die Anzahl der Erfolge bei n Ausführungen eines Bernoulli-Experiments mit der Erfolgswahrscheinlichkeit p, so gilt:

$$P(x) = \binom{n}{x} \cdot p^{x} \cdot (1-p)^{n-x} =: B_{n;p}(x)$$

Eingabe: Stichprobenumfang n $(1 \leq n \leq 100)$ $n \in N^{+}$
Zahl der Erfolge x bzw. k $(k \leq n)$ $k \in N_0^{+}$
Erfolgswahrscheinlichkeit p $(0 \leq p \leq 1)$

Beispiel: Eine Firma stellt Transistoren her, wobei 2 % der produzierten Teile defekt sind. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von 20 Transistoren genau 3 defekt sind?
x = Anzahl der defekten Transistoren unter 20
p = 0,02
n = 20
k = 3
Lösung: P(x=3) = 0,0065

b) Verteilungsfunktion:

Theorie: Bezeichnet die Zufallsvariable x die Anzahl der Erfolge bei n Ausführungen eines Bernoulli-Experiments mit der Erfolgswahrscheinlichkeit p, so gilt:

$$P(x) = \sum_{i=0}^{x} \binom{n}{i} \cdot p^{i} \cdot (1-p)^{n-i}$$

Eingabe: Stichprobenumfang n $(1 \leq n \leq 100)$ $n \in N^{+}$
Zahl der Erfolge x bzw. k $(k \leq n)$ $k \in N_0^{+}$
Erfolgswahrscheinlichkeit p $(0 \leq p \leq 1)$

Beispiel: 5 % aller Menschen sind farbenblind. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter 100 Personen wenigstens 3 farbenblind sind?
x = Anzahl der farbenblinden Menschen unter 100
p = 0,05
n = 100
k = 3
Lösung: $P(x \geq 3) = 1 - P(x \leq 2) = 1 – 0{,}1183 = 0{,}8817$

c) Annahmetest:

Theorie: x sei eine binomialverteilte Zufallsvariable.
Bei vorgegebener Erfolgszahl k wird getestet, ob diese Zahl mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von i % im Annahmebereich liegt oder nicht.

Eingabe: Stichprobenumfang n $(1 \leq n \leq 100)$ $n \in N^{+}$
Erfolgswahrscheinlichkeit p $(0 \leq p \leq 1)$
Irrtumswahrscheinlichkeit c bzw. i $(0 \leq c \leq 1)$
Zu testende Erfolgszahl g $(g \leq n)$ $g \in N_0^{+}$

Beispiel: Eine Maschine stellt Teile her, wovon höchstens 5 % Ausschuss sind. Bei einer Überprüfung dieser Behauptung werden in einer Stichprobe von 100 Teilen 8 defekte Stücke festgestellt. Lässt sich die Behauptung nach diesem Ergebnis noch aufrechterhalten (c = 10 %)?

```
      x = Anzahl der defekten Teile unter 100
      p =   0,05
      n = 100
      c =   0,10
      g =   8
   Lösung: P(x≥g) ≤ 0,1  =>  1 - P(x≤g-1) ≤ 0,1
                    <=>      P(x≤g-1) ≥ 0,9
                     =>         g – 1 = 8    <=>  g = 9
           Annahmeintervall: (0,  1, ... ,   8)
           Ablehnintervall:  (9, 10, ... , 100)
```

Sonstiges zum Programm BINOMIAL:

- Nach Eingabe von n und p liest der Computer die Fakultäten von 0 bis n ein (es ergeben sich kürzere Wartezeiten).

Programm: **NORMALVERT**

Mit diesem Programm lässt sich bei normalverteilten Zufallsvariablen der Wahrscheinlichkeitstest in zweierlei Weise durchführen:
Test in Umgebung vom Erwartungswert und zweiseitiger Wahrscheinlichkeitstest (Bestimmung des Signifikanzintervalles).

a) Test in Umgebung vom Erwartungswert:

Theorie: Nach dem Zentralen Grenzwertsatz kann die standardisierte Summe von unabhängigen Zufallsgrößen gleicher Verteilung durch die Normalverteilung approximiert werden. Damit ist es möglich, Konfidenzintervalle und Ablehnungsbereiche für Tests auf die gleiche Weise zu berechnen. Aus dem Erwartungswert kann aufgrund der Irrtumswahrscheinlichkeit die entsprechende Abweichung der Zufallsgröße ermittelt werden; alle Werte außerhalb dieses Intervalls bilden den Ablehnungsbereich.

Eingabe: Stichprobenumfang n $n \in N^+$
zu testende Wahrscheinlichkeit p $(0 \le p \le 1)$
Irrtumswahrscheinlichkeit c $(0 \le c \le 1)$
(Für c sind im Programm folgende Werte zugelassen:
0,01 / 0,02 / ... / 0,10 und
0,11 / 0,12 / ... / 0,20)

Beispiel: Ein Computer druckt 100.000 Wörter; dabei ist die Wahrscheinlichkeit für ein Substantiv 4 %.
Berechne mittels der Normalverteilung ein möglichst kleines Intervall (symmetrisch zum Erwartungswert), in dem mit mindestens 90 % Wahrscheinlichkeit die Anzahl der ausgedruckten Substantive liegt.

```
   x = Anzahl der Substantive unter 100.000
   n = 100.000
   p = 0,04
   c = 0,10
Lösung: Mittelwert = 40.000 / Standardabweichg. = 154,92
        Gesuchtes Intervall:  (39.745 ; 40.255)
```

b) Zweiseitiger Wahrscheinlichkeitstest:

Theorie: Es wird vorausgesetzt, dass die Grundgesamtheit, der die Stichprobe entnommen wird, normalverteilt ist. Aber auch in den Fällen, bei denen dies nicht zutrifft, ist das Stichprobenmittel bei großen Stichproben näherungsweise normalverteilt (Zentraler Grenzwertsatz), und der Test ist damit durchführbar. Nach Aufstellung einer Nullhypothese wird anhand vorgegebener Irrtumswahrscheinlichkeit und statistischer Sicherheit entschieden, ob das Stichprobenmittel innerhalb des Signifikanzintervalls liegt. Anhand dieses Kriteriums kann dann die Nullhypothese bestätigt werden oder nicht.

Eingabe: Stichprobenumfang $\underline{n}$ $n \in N^+$
Stichprobenmittel $\overline{x}$
Irrtumswahrscheinlichkeit c $(0 \leq c \leq 1)$
(Für c sind im Programm folg. Werte zugelassen:
0,100 / 0,090 / 0,080 / ... / 0,010 und
0,009 / 0,008 / ... / 0,001 und 0,0001)
Mittelwert μ_x
Standardabweichung δ_x

Beispiel: Die mit einer bestimmten Metallbohrmaschine hergestellten Bohrlöcher zeigen beim Durchmesser erfahrungsgemäß eine Standardabweichung von 0,1 mm. Um einen neuen Bohreinsatz für den Bohrlochdurchmesser 77 mm zu prüfen, werden 100 mit diesem Bohreinsatz gebohrte Löcher ausgemessen und für die Durchmesser der Mittelwert $\overline{x}$ = 77.005 mm errechnet. Es soll nun mit einer statistischen Sicherheit von 95 % entschieden werden, ob gegen die Verwendung des Bohreinsatzes etwas einzuwenden ist.

$\underline{n}$ = 100
$\overline{x}$ = 77,005
δ_x = 0,01
μ_x = 77
c = 0,05

Lösung: Signifikanzintervall (76,99804 ; 77;00196)
$\overline{x}$ liegt nicht im Signifikanzintervall, gegen die Verwendung des neuen Bohreinsatzes ist also etwas einzuwenden!

Programm: **NULLSTELLE**

Mit diesem Programm lassen sich mittels vier verschiedener Verfahren die Nullstellen einer Funktion berechnen.

a) Newton-Verfahren:

Theorie: Dieses Iterationsverfahren zur Nullstellenbestimmung konvergiert am schnellsten. Da die Differenzierbarkeit der Funktion vorausgesetzt wird, kann die Nullstelle der Funktion näherungsweise durch die der Tangente bestimmt werden.

Eingabe: Funktion in Programmzeile 170
Ableitung in Programmzeile 180
Startwert X0

Beispiel: Bestimme die Nullstelle der Funktion $y = e^x - 2$
Startwert X0
Nach 4 Iterationsschritten wird die Nullstelle ausgegeben: N (0,6931471806 / 0)

b) Regula-Falsi:

Theorie: Bei der Regula-Falsi wird die Nullstelle einer stetigen Funktion näherungsweise bestimmt durch die Nullstelle einer Sekante.

Eingabe: Funktion in Programmzeile 170
Startwert X1, Startwert X2 $(X1 \neq X2)$

Beispiel: Bestimme die Nullstelle der Funktion $y = e^x - 2$
Startwert X1 = 0, X2 = 1
Nach 6 Iterationsschritten wird die Nullstelle ausgegeben: N (0,6931471806 / 0)

c) Intervallhalbierung:

Theorie: Dem Intervllhalbierungsverfahren (auch Bisektionsverfahren genannt) liegt der Zwischenwertsatz für stetige Funktionen zugrunde: Ändert eine stetige Funktion in einem Intervall ihr Vorzeichen, so hat sie dort mindestens eine Nullstelle. Diese Nullstelle wird nach dem Prinzip des binären Suchens bestimmt. Durch Berechnung des Vorzeichens der Funktion in der Intervallmitte erhält man Aufschluss, in welcher Intervallhälfte sich die gesuchte Nullstelle befindet. Die Konvergenz ist jedoch langsam.

Eingabe: Funktion in Programmzeile 170
untere Intervallgrenze XU
obere Intervallgrenze XO

Beispiel: Bestimme die Nullstelle der Funktion $y = e^x - 2$
untere Intervallgrenze XU = 0
obere Intervallgrenze XO = 1
Nach 33 Iterationsschritten wird die Nullstelle ausgegeben: N (0,6931471806 / 0)

d) Polynomnullstellen:

Theorie: Mittels Newton-Verfahren und Polynomdivision durch Hornerschema werden alle Nullstellen einer rationalen Funktion bestimmt.

Eingabe: Grad der Funktion (bei gebrochenrationaler Funktion Eingabe des Zählergrades)
Koeffizienten (bei gebrochenrationaler Funktion Eingabe der Zählerkoeffizienten)
Startwert

Beispiel: Bestimme sämtliche Nullstellen folgender Funktion:
$$y = x^6 - 21x^5 + 175x^4 - 735x^3 + 1624x^2 - 1764x + 720$$
Startwert = 1
Als Lösung werden die Nullstellen 1, 2, 3, 4, 5 und 6 ausgegeben.

Sonstiges zum Programm NULLSTELLE:
- Bei Ausgabe auf dem Drucker muss bei den drei zuerst genannten Verfahren zur Nullstellenberechnung zusätzlich die Funktion per INPUT-Befehl eingegeben werden; dies dient lediglich dazu, dass die Funktion auf dem Drucker ausgegeben werden kann.

Programm: **BRUCH**

Mit diesem Programm wird die Verknüpfung zweier Brüche durch *, /, - oder + ausgegeben. Durch Multipliktion eines Bruchs mit 1/1 wird selbiger in der gekürzten Form ausgegeben.

Eingabe: Zähler und Nenner der beiden Brüche
(aufgrund der begrenzten Darstellungsmöglichkeit auf dem Bildschirm wird für die Eingabe ein oberes Limit gesetzt, welches bei Überschreitung entsprechend angezeigt wird!)

Beispiel: Multipliziere die Brüche 23/4 und 44/56.
Lösung: 253/56

Programm: **PRIMZERLEG**

Mit diesem Programm kann jede positive natürliche Zahl (kleiner als 250.000) in ihre Primfaktoren zerlegt werden. Um diese Zahl möglichst schnell auf Primzahlteiler zu untersuchen, werden alle benötigten Primzahlen innerhalb des Programms mittels DATA-Werten gespeichert.

Theorie: Es genügt, nur Primzahlen kleiner als die Wurzel der Zahl auf Teilereigenschaft zu prüfen, denn wird die Zahl in ein Produkt zweier Teiler zerlegt, so muss einer der Teiler kleiner oder gleich der Wurzel der Zahl sein.

Eingabe: Zahl Z ($Z \in N^+$ und $Z < 250.000$)

Beispiel: Die Zahl 222.222 soll in ihre Primfaktoren zerlegt werden.
Lösung: $222.222 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37$

Programm: **PRIMZAHLEN**

Mit diesem Programm lassen sich die ersten n bzw. die Primzahlen bis m berechnen.

a) Teiler-Test-Verfahren:

Theorie: In einer Schleife werden aufsteigend ungerade Zahlen erzeugt und einem Primzahltest unterzogen. Um den Programmablauf zu beschleunigen, werden nicht alle ungeraden Zahlen auf Teiler-Eigenschaft untersucht, sondern nur die innerhalb des Programms berechneten Primzahlen. Es werden die n ersten Primzahlen ausgegeben.

Eingabe: Zahl der auszugebenden Primzahlen n ($n \in N^+$ und $n \leq 1200$)

Beispiel: Die ersten 100 Primzahlen werden innerhalb von 57 Sekunden ausgegeben.
Die ersten 300 Primzahlen werden innerhalb von 4 Minuten und 22 Sekunden ausgegeben.

b) „Sieb des Erathostenes“:

Theorie: Beim Primzahlsieb des Erathostenes werden, ausgehend von der Menge {2, 3, 4, ... , m}, zunächst alle Vielfachen von 2 „ausgesiebt“, jedoch nicht die Zahl 2 selbst, dann alle Vielfachen von 3 und so fort. Es werden also alle Vielfachen der jeweils kleinsten Zahl gestrichen, die noch nicht ausgesiebt wurde. Das Verfahren endet, wenn die Vielfachen von Wurzel m oder einer größeren Zahl zu streichen wären. Es werden alle Primzahlen bis m ausgegeben.

Eingabe: Zahl m, bis zu welcher alle Primzahlen ausgegeben werden sollen ($m \in N^+$ und $m \leq 1200$)

Beispiel: Die ersten 100 Primzahlen werden innerhalb von 1 Minute und 20 Sekunden ausgegeben.
Die ersten 300 Primzahlen werden innerhalb von 1 Minute und 59 Sekunden ausgegeben.

Sonstiges zum Programm PRIMZAHLEN:
- Das Siebverfahren arbeitet anfangs langsamer, wird aber dann immer schneller; es können jedoch nicht so viele Primzahlen ausgegeben werden wie beim Teiler-Test-Verfahren.

Programm: **GAUSS**

Mit diesem Programm können Gleichungssysteme mit maximal 20 Unbekannten gelöst werden.

Theorie: Das Gaußsche Eliminationsverfahren zählt zu den grundlegenden Algorithmen der Numerischen Mathematik, da sich viele Probleme auf ein lineares Gleichungssystem zurückführen lassen. Die Überführung eines Systems in ein gestaffeltes System äquivalenter Gleichungen kann – einfacher als mit Austausch – durch geeignete Linearkombinationen erreicht werden. Dabei werden schrittweise die Variablen eliminiert.

Eingabe: Zahl der Gleichungen n ($n \in N^+$ und $n \leq 20$)
Matrix

Beispiel: Folgendes Gleichungssystem soll gelöst werden:

$$\begin{aligned} a + 2b + 3c &= 4 \\ 2a - b + 3c &= -8 \\ 3a + 12b - 6c &= 10 \end{aligned}$$

Lösung: a = -4,451612903
b = 2,516129032
c = 1,139784946

- -

Hinweise zum Programmpaket als Ganzes

- Alle Programme können auch auf Wunsch Ausgabe auf dem TI-32-Zeichen-Thermodrucker liefern; bei jedem Programm wird per INPUT-Befehl gefragt, ob zusätzliche Ausgabe auf dem Drucker erwünscht ist.

- Alle Programme auf der Diskette sind geschützt, d.h. können nicht aufgelistet werden. Lediglich das Programm zur Berechnung von Nullstellen wird ungeschützt geliefert.

- Zum Lieferumfang gehören: Programmbeschreibungen zu den 7 Einzelprogrammen, Ausgabebeispiele auf dem Drucker, Diskette (mit Menü-Programm)

- Sektorenbelegungen auf der Diskette der einzelnen Programme:

BINOMIAL	16 Sektoren
BRUCH	9 Sektoren
GAUSS	10 Sektoren
NORMALVERT	13 Sektoren
NULLSTELLE	21 Sektoren
PRIMZAHLEN	9 Sektoren
PRIMZERLEG	9 Sektoren
insgesamt	87 Sektoren